Aula 3

Definição: Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** $0 < m < n$ (mergulhada em $\mathbb{R}^n$) e de classe C^k ou, de forma mais concisa, simplesmente **variedade-**m, se, para qualquer ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p)$ centrada em p tal que o conjunto dos pontos de M na bola, ou seja o conjunto $M \cap B(p)$, pode ser descrito de uma das três seguintes formas equivalentes:

- Como **conjunto de nível** zero de uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, de classe $C^k(\Omega)$, definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que a sua matriz jacobiana $DF(x)$ tem característica máxima $(n-m)$ para todo o $x \in M \cap B(p)$ e este conjunto é dado por:

$$M \cap B(p) = \{x \in \Omega : F(x) = 0\}.$$

- Como **gráfico** de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe $C^k(A)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$:

$$M \cap B(p) = \{(u,v) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}}_{\mathbb{R}^n} : v = f(u), u \in U\}.$$

- Como imagem duma **parametrização** dada por uma função injetiva $g : T \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida num aberto $T \subset \mathbb{R}^m$, com inversa contínua $g^{-1} : g(T) \to T$, tal que a sua matriz jacobiana tem característica máxima m, para todo o $t \in T$:

$$M \cap B(p) = \{g(t) \in \mathbb{R}^n, t \in T\}.$$

Define-se ainda como variedade de dimensão n qualquer conjunto (não vazio) aberto de $\mathbb{R}^n$, e variedade de dimensão 0 qualquer conjunto (não vazio) de pontos isolados.

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m.

- Diz-se que um vector $T \in \mathbb{R}^n$ é **tangente** à variedade M, num ponto $p \in M$, se existir uma curva $\gamma \subset M$ tal que $p = \gamma(0)$ e $T = \dot{\gamma}(0)$, ou seja, que passa em p com tangente T.

- Ao espaço vectorial (de dimensão m igual à da variedade) gerado pelos vectores tangentes a M em $p \in M$ designa-se por **espaço tangente a M no ponto** p, e representa-se por T_pM.

- Ao espaço vectorial dos vectores ortogonais a T_pM, de dimensão $n-m$, designa-se por **espaço normal a M no ponto** p, e representa-se por $(T_pM)^\perp$ ou N_pM.

Obs: Não confundir o espaço tangente T_pM a uma variedade M no ponto $p \in M$ com o plano (ou reta) tangente à variedade, no mesmo ponto. O espaço tangente é um espaço vetorial, e portanto passa pela origem. O plano tangente é paralelo ao espaço tangente e passa no ponto.

Idem para o espaço normal e plano/reta normal.

Proposição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m.

- Se, na vizinhança dum ponto $p \in M$, a variedade for descrita por uma parametrização $g : T \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, então o espaço tangente a M no ponto $p \in M$, T_pM, é o espaço gerado pelas colunas da matriz jacobiana de g no ponto $t_0 = g^{-1}(p)$, ou seja, pelas colunas de $Dg(t_0)$.

- Se, na vizinhança dum ponto $p \in M$, a variedade for descrita por uma equação cartesiana $F(x) = 0$, ou seja, como conjunto de nível zero de uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, então o espaço normal a M no ponto $p \in M$, $(T_pM)^\perp$, é o espaço gerado pelas linhas da matriz jacobiana de F no ponto p, ou seja, pela linhas de $DF(x = p)$: $\nabla F_1(x = p)$, $\nabla F_2(x = p)$, $\ldots$,$\nabla F_{n-m}(x = p)$.